

УДК 539.12.01

## РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СЕЧЕНИЯ РАССЕЙНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ С ПОТЕНЦИАЛАМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ, СОДЕРЖАЩИМИ «БАРЬЕР»

В.Н. Капшай, С.И. Фиалка

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## RELATIVISTIC SCATTERING CROSS SECTIONS OF A TWO-PARTICLE SYSTEM IN THE CASE OF INTERACTION POTENTIALS CONTAINING A "BARRIER"

V.N. Kapshai, S.I. Fialka

F. Scorina Gomel State University

Квазипотенциальные уравнения для состояний рассеяния системы двух частиц с произвольным орбитальным моментом исследуются в релятивистском конфигурационном представлении. Рассмотрен случай сферически-симметричных потенциалов взаимодействия, содержащих «барьер». Представлены результаты численных расчётов сечений рассеяния, подробно обсуждается их резонансное поведение. Проведён сравнительный анализ решений релятивистских и нерелятивистской задач.

**Ключевые слова:** квазипотенциальный подход, уравнение Логунова – Тавхелидзе, уравнение Гросса, уравнение Кадышевского, релятивистское конфигурационное представление, резонансные состояния.

Quasipotential equations for scattering states of a two-particle system with arbitrary angular momentum are investigated in the relativistic configuration representation. The case of spherically symmetric interaction potentials containing a "barrier" is considered. Scattering cross sections obtained from numerical calculations are presented, their resonant behavior is discussed in detail. Relativistic and non-relativistic results are compared.

**Keywords:** quasipotential approach, Logunov – Tavkhelidze equation, Gross equation, Kadyshevsky equation, relativistic configuration representation, resonant states.

### Введение

В нерелятивистской квантовой теории широко используются интегральные уравнения Липпмана – Швингера и Шрёдингера в конфигурационном (координатном) представлении как универсальный инструмент для наиболее наглядного описания процессов взаимодействия частиц. В то же время, всё чаще возникает необходимость использования более глубоких и физически строгих подходов – релятивистских. Использование уравнений квазипотенциального типа позволяет перейти от хорошо разработанной нерелятивистской теории к релятивистской наиболее безболезненно, но только в импульсном представлении (ИП). В случае отличного от нуля орбитального момента системы частиц, интегральные квазипотенциальные уравнения в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) долгое время практически не исследовались, так как эта задача представлялась чрезвычайно громоздкой. Тем не менее, такой подход представляет большой интерес, так как имеет ряд преимуществ по сравнению с подходом, основанным на решении интегральных квазипотенциальных уравнений в ИП.

В настоящей работе непосредственно в РКП решены интегральные квазипотенциальные уравнения с потенциалами взаимодействия, содержащими «барьер». При решении использованы

результаты работы [1], где предложено удобное для расчётов определение релятивистских парциальных волн, найден явный вид и определены свойства парциальных свободных функций Грина в РКП для различных вариантов квазипотенциальных уравнений.

### 1 Квазипотенциальные уравнения с суперпозицией $\delta$ -потенциалов

В рамках квазипотенциального подхода рассмотрим релятивистскую задачу о рассеянии двух бесспиновых частиц одинаковой массы  $m$  в системе центра масс. В РКП в случае локального сферически-симметричного квазипотенциала задачу можно свести к решению радиальных интегральных уравнений для волновой функции относительного движения частиц [1] ( $\hbar = c = 1$ ):

$$\psi_\ell(\chi_q, r) = s_\ell(\chi_q, r) + \int_0^\infty G_\ell(\chi_q; r, r') V(\chi_q, r') \psi_\ell(\chi_q, r') dr'. \quad (1.1)$$

Здесь  $\chi_q$  – быстрота, которая связана с энергией двухчастичной системы соотношением  $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$ ;  $V(\chi_q, r')$  – оператор взаимодействия (квазипотенциал). В отсутствие взаимодействия решением радиальных уравнений (1.1) являются релятивистские парциальные волны [1]:

$$s_\ell(\chi, r) = (-i)^{\ell+1} \frac{\exp(mr\pi)}{\Gamma(imr)} Q_\ell^{imr}(\operatorname{cth} \chi) = \frac{1}{2i} (e_\ell^+(\chi, r) - e_\ell^-(\chi, r));$$

$$e_\ell^\pm(\chi, r) = i^\ell \frac{\Gamma(imr - \ell)\Gamma(\mp imr + \ell + 1)}{\Gamma(imr)} P_\ell^{\pm imr}(\operatorname{cth} \chi).$$

В ИП было предложено множество вариантов квазипотенциальных уравнений, разница между которыми – вид свободной функции Грина. Парциальные свободные функции Грина в РКП связаны со свободной функцией Грина в ИП формулой [1]:

$$G_\ell(\chi_q; r, r') = \frac{1}{m\pi} \int_0^\infty s_\ell(\chi_p, r) G_0(\chi_q, \chi_p) s_\ell^*(\chi_p, r') d\chi_p.$$

Здесь рассмотрим три варианта квазипотенциальных уравнений, полученных изначально в ИП: уравнение Логунова – Тавхелидзе, уравнение Гросса и уравнение Кадышевского. Соответствующие парциальные свободные функции Грина в РКП были найдены и исследованы в работе [1]:

$$G_\ell(\chi_q; r, r') = \tilde{G}_{\pm, \ell}^{(LT)}(\chi_q; r, r') - \tilde{G}_{-, \ell}(\chi_q; r, r'),$$

где  $(K_q = (m \operatorname{sh} \chi_q \operatorname{ch} \chi_q)^{-1})$

$$\tilde{G}_{\pm, \ell}^{(LT)}(\chi_q; r, r') = \frac{K_q}{2i} \left( \frac{e_\ell^+(\chi_q, r) e_\ell^{\pm*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[-\pi m(r \mp r')]} + \frac{e_\ell^-(\chi_q, r) e_\ell^{\mp*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[\pi m(r \mp r')]} \right);$$

$$\tilde{G}_{\pm, \ell}^{(Gr)}(\chi_q; r, r') = \frac{K_q}{2i} \left( \frac{e_\ell^+(\chi_q, r) e_\ell^{\pm*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[-2\pi m(r \mp r')]} + \frac{e_\ell^-(\chi_q, r) e_\ell^{\mp*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[2\pi m(r \mp r')]} \right);$$

$$\tilde{G}_{\pm, \ell}^{(K)}(\chi_q; r, r') = \frac{K_q}{2i} \left( \frac{e_\ell^+(\chi_q, r) e_\ell^{\pm*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[-2\pi m(r \mp r')]} + \frac{e_\ell^-(\chi_q, r) e_\ell^{\mp*}(\chi_q^*, r')}{1 - \exp[2\pi m(r \mp r')]} + \frac{e_\ell^+(i\pi/2, r) e_\ell^{\mp*}(-i\pi/2, -r')}{1 + \exp[-\pi m(r \mp r')]} i \operatorname{sh} \chi_q \right).$$

Уравнения (1.1) допускают точное решение в случае оператора взаимодействия в виде суперпозиции  $N$   $\delta$ -функций, отличных от нуля в точках  $\rho_\tau$ :

$$V(\chi_q, r) = \sum_{\tau=1}^N D_\tau(\chi_q) \delta(r - \rho_\tau). \quad (1.2)$$

Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к уравнениям вида:

$$\Psi_\ell(\chi_q, r) = s_\ell(\chi_q, r) + \sum_{\tau=1}^N G_\ell(\chi_q; r, \rho_\tau) D_\tau(\chi_q) \Psi_\ell(\chi_q, \rho_\tau). \quad (1.3)$$

Используя в (1.3) вместо переменной  $r$  значения

$\rho_\tau$  ( $\tau = 1, 2, \dots, N$ ), получаем обычную матричную задачу относительно значений радиальных волновых функций  $\Psi_\ell(\chi_q, r)$  при  $r = \rho_\tau$ :

$$\left[ \delta_{\tau\tau'} - G_\ell(\chi_q; \rho_\tau, \rho_{\tau'}) D_{\tau'}(\chi_q) \right]_{\tau\tau'} \times \left[ \Psi_\ell(\chi_q, \rho_{\tau'}) \right]_{\tau'} = \left[ s_\ell(\chi_q, \rho_\tau) \right]_{\tau}. \quad (1.4)$$

На основе асимптотического поведения волновой функции на больших расстояниях можно определить парциальные амплитуды и сечения рассеяния [1]:

$$f_\ell(\chi_q) = \frac{-K_q}{m \operatorname{sh} \chi_q} \sum_{\tau=1}^N s_\ell^*(\chi_q, \rho_\tau) D_\tau(\chi_q) \Psi_\ell(\chi_q, \rho_\tau);$$

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^\infty \sigma_\ell = 4\pi \sum_{\ell=0}^\infty (2\ell + 1) |f_\ell(\chi_q)|^2.$$

Выбирая специальным образом коэффициенты  $D_\tau$  при  $\delta$ -функциях, можно получить приближённое решение для широкого класса квазипотенциалов.

## 2 Численное решение задачи с гладкими модельными потенциалами

Если функция гладкого квазипотенциала  $V(\chi_q, r)$  убывает с ростом  $r$ , то диапазон изменения переменной  $r$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ) можно разделить на две части: конечную  $0 \leq r \leq r_N$ , где суперпозиция  $\delta$ -потенциалов используется вместо гладкого потенциала  $V(\chi_q, r)$  и полубесконечную  $r > r_N$ , где потенциальное поле пренебрежимо мало и полагается равным нулю. Выбрав затем

$$D_\tau(\chi_q) = h_\tau V(\chi_q, \rho_\tau), \quad h_\tau = (r_\tau - r_{\tau-1});$$

$$\rho_\tau = (r_\tau + r_{\tau-1})/2; \quad \tau = 1, 2, \dots, N,$$

формулы (1.4), (1.5) можно использовать для численного решения задачи с гладким квазипотенциалом  $V(\chi_q, r)$ . Отметим, что к аналогичному результату приводит использование в (1.1) квадратурной формулы центральных прямоугольников с переменным шагом.

В качестве оператора взаимодействия рассмотрим не зависящий от энергии  $2E_q$  потенциал, содержащий «барьер»

$$(\nu = \mu/m; \quad \varphi = \arccos(\nu^2/2 - 1)):$$

$$V_{Rel}(r) = A \frac{4}{m^2} \left( \frac{2(4 - \nu^2)m^2 r^2 + 2 + \nu^2}{(4 - \nu^2)^{5/2}} \frac{\operatorname{sh}(mr\varphi)}{\operatorname{sh}(mr\pi)} - \frac{3\nu m r \operatorname{ch}(mr\varphi)}{(4 - \nu^2)^2 \operatorname{sh}(mr\pi)} \right). \quad (2.1)$$

Потенциал (2.1) получен нами в результате релятивистского обобщения модельного квантовомеханического потенциала:

$$V_{NR}(r) = Ar^2 \exp(-\mu r). \quad (2.2)$$

Процедура релятивистского обобщения заключалась в замене в импульсном представлении квадрата переданного импульса в евклидовом пространстве на квадрат переданного импульса в пространстве Лобачевского.

Множество различных методов численного решения задач квантовой механики и квантовой химии отработано на потенциале (2.2) [2]–[5]. Данный потенциал, в случае положительного параметра  $A$ , исключает присутствие связанных состояний и позволяет наблюдать узкие резонансы. В отличие от (2.2), потенциал (2.1) в начале координат принимает некоторое положительное ненулевое значение, а с увеличением  $r$  переходит в нерелятивистский потенциал. В нерелятивистском пределе, когда  $m \rightarrow \infty$ , потенциалы (2.1) и (2.2) совпадают во всей области изменения переменной  $r$ .

На рисунке 2.1 приведены численные расчёты парциальных сечений рассеяния при  $\ell = 0$ , которые получены на основе радиального уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалами (2.1) и (2.2) с параметрами  $A=15$ ,  $\mu=1$  при  $m=1$ . В данном случае частицы могут на некоторое время образовать связанное состояние с резонансным значением энергии  $2E_q \approx 6$ , что хорошо видно на рисунке 2.1 а на примере потенциала (2.1): функция парциального сечения имеет скачок в окрестности резонансного значения энергии  $2E_q = 5,818\dots$ , а волновая функция в начале координат имеет такое же поведение как в случае связанного состояния двухчастичной системы. Зависимость парциального сечения от количества используемых  $\delta$ -функций  $N$ , приведённая на рисунке 2.1 б, позволяет наглядно оценить точность численного метода. На рисунке 2.1 в видно, что описание взаимодействия с использованием релятивистского «барьера» (2.1) приводит к меньшей ширине и энергии резонансов, чем при использовании потенциала (2.2).

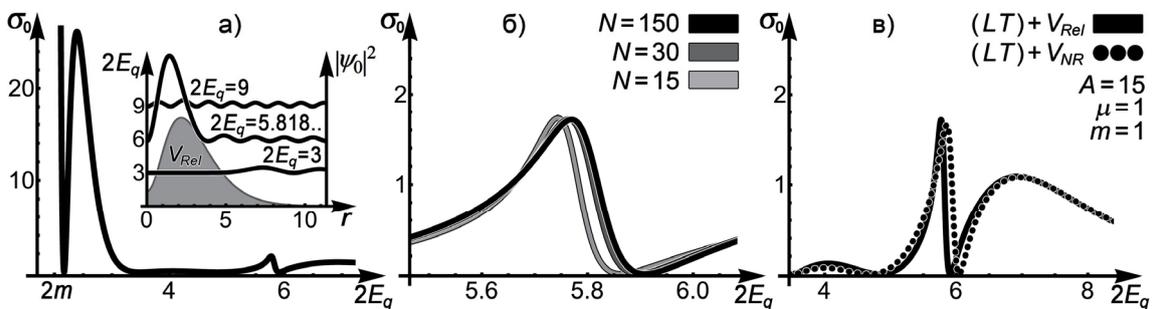


Рисунок 2.1 – Зависимость парциального сечения  $\sigma_0$  от энергии  $2E_q$  для уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалами  $V_{Rel}$  и  $V_{NR}$  при  $A=15$   
 (а – дополнительно зависимость квадрата модуля волновой функции;  
 б – при разном количестве  $\delta$ -функций  $N$ ; в – для двух вариантов потенциала)

На рисунке 2.2 приведены численные расчёты парциальных сечений рассеяния при  $\ell = 0$  в зависимости от импульса  $q = m \operatorname{sh} \chi_q$ , которые получены на основе трёх вариантов квазипотенциальных уравнений с потенциалом (2.1) и уравнения Липпмана – Швингера с потенциалом (2.2) (нерелятивистский предел квазипотенциальных уравнений). Видно, что увеличение параметра  $A$  (увеличение высоты барьера) приводит к росту энергии и уменьшению ширины резонансов, а также к увеличению разницы между результатами решения разных уравнений. Аналогичные расчёты для случая  $\ell = 1$  представлены на рисунке 2.3.

На рисунках 2.2 и 2.3 видно, что при увеличении параметра  $A$  резонансная энергия растёт быстрее в случае релятивистских уравнений по сравнению с нерелятивистским случаем, а резонансная энергия в случае уравнения Логунова – Тавхелидзе всегда принимает некоторое промежуточное значение по отношению к соответствующим значениям для уравнений Кадышевского и Гросса.

При рассматриваемом типе взаимодействия, полное сечение рассеяния не представляет интереса с точки зрения наглядности резонансных эффектов, однако позволяет оценить разницу между релятивистским подходом и нерелятивистским. На рисунке 2.4 видно, что функция полного сечения рассеяния, рассчитанная на основе уравнения Логунова – Тавхелидзе с релятивистским потенциалом (2.1), принимает меньшее значение при  $q = 0$  и убывает быстрее с ростом энергии, по сравнению с функцией полного сечения рассеяния, рассчитанной на основе нерелятивистского уравнения Липпмана – Швингера с потенциалом (2.2). Это согласуется с тем, что нерелятивистский подход применим для случаев низких энергий. Разница между результатами решения разных вариантов квазипотенциальных уравнений в выбранном масштабе практически не заметна и поэтому не приводится.

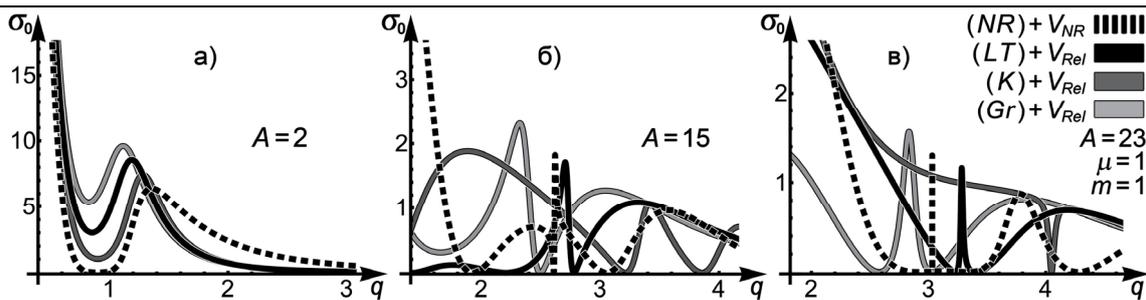


Рисунок 2.2 – Зависимость частичного сечения  $\sigma_0$  ( $\ell = 0$ ) от импульса  $q$  для квазипотенциальных уравнений и уравнения Липпмана – Швингера (а – при  $A = 2$ ; б – при  $A = 15$ ; в – при  $A = 23$ )

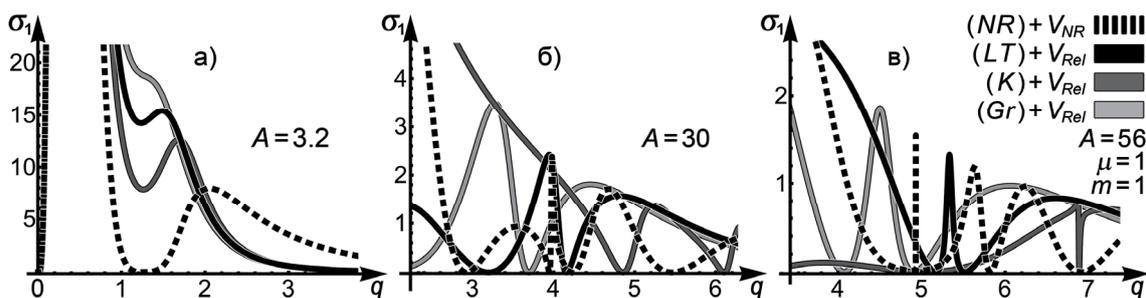


Рисунок 2.3 – Зависимость частичного сечения  $\sigma_1$  ( $\ell = 1$ ) от импульса  $q$  для квазипотенциальных уравнений и уравнения Липпмана – Швингера (а – при  $A = 3.2$ ; б – при  $A = 30$ ; в – при  $A = 56$ )

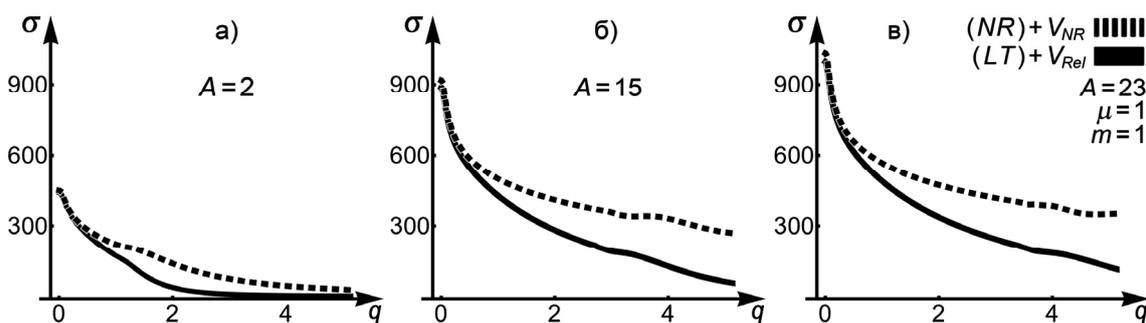


Рисунок 2.4 – Зависимость полного сечения рассеяния от импульса  $q$  для уравнений Логунова – Тавхелидзе и Липпмана – Швингера (а – при  $A = 2$ ; б – при  $A = 15$ ; в – при  $A = 23$ )

### Заключение

Рассмотрен релятивистский аналог популярной квантовомеханической задачи о рассеянии, где взаимодействие описывается модельным потенциалом, содержащим «барьер». Потенциал рассмотрен в классическом виде и его релятивистское обобщение. Получено численное решение трёх вариантов квазипотенциальных интегральных уравнений в РКП для системы двух бесспиновых частиц с ненулевым орбитальным моментом. Исследовано резонансное поведение частичных сечений рассеяния. Выявлены отличия между релятивистским подходом и нерелятивистским. Проверена эффективность численного метода.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kapshai, V.N. Partial quasipotential equations in the relativistic configuration representation / V.N. Kapshai, S.I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2018. – Vol. 60, № 10. – P. 1696–1704.

2. Kapshai, V.N. Numerical determination of complex resonance energies by using a superposition of  $\delta$ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova, N. Elander // International journal of quantum chemistry. – 2003. – Vol. 91, № 4. – P. 533 – 540.

3. Brändas, E. Titchmarsh–Weyl theory and its relations to scattering theory: Spectral densities and cross sections. Theory and applications / E. Brändas, M. Rittby, N. Elander // Journal of mathematical physics. – 1985. – Vol. 26, № 10. – P. 2648 – 2658.

4. Tolstikhin, O.I. Siegert pseudostate formulation of scattering theory: One-channel case / O.I. Tolstikhin, V.N. Ostrovsky, H. Nakamura // Physical Review A. – 1998. – Vol. 58, № 3. – P. 2077–2096.

5. Shilyaeva, K. Identifying resonance structures in a scattering cross section using the N3++  $H \rightarrow NH_3^+ \rightarrow N_2^{++} H^+$  reaction as an example / K. Shilyaeva, E. Yarevsky, N. Elander // Journal of Physics B. – 2009. – Vol. 42, № 4. – P. 044011.

Поступила в редакцию 29.01.18.